模块四 综合提升篇

第 1 节 动态问题探究（★★★☆）

内容提要

动点、动线、动面问题是立体几何小题中的难点问题，本节归纳几种常见的动态问题的解题方法.

1．动态平行、垂直的判断：

①过定点 P 和动点 Q 的直线 PQ 与平面 α 平行，要找 Q 的轨迹，可过 P 作一个与 α 平行的平面 β，则点 Q 在 β 上，若规定 Q 也在另一个平面 γ 上，则 Q 的轨迹是 β 与 γ 的交线，如图 1 中的蓝线.

②过定点 P 和动点 Q 的直线与定直线 l 垂直，要找 Q 的轨迹，可过 P 作一个与 l 垂直的平面 α，则 Q 在 α 上，若规定 Q 也在另一个平面 β 上，则 Q 的轨迹是 α 与 β 的交线，如图 2 中的蓝线.

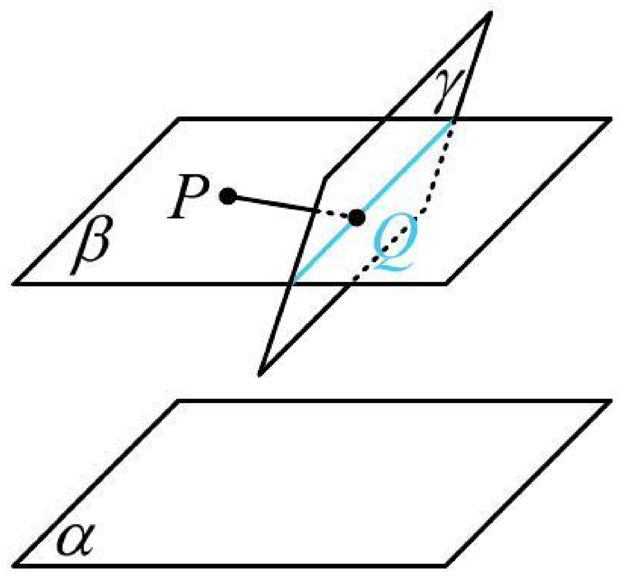


图1

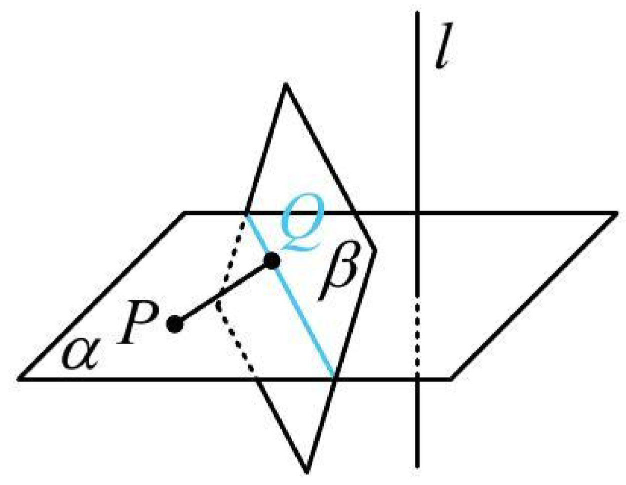


图2

2．空间轨迹为球：

①空间中满足到定点 P 的距离等于定长 R 的点 A 的轨迹是以 P 为球心，R 为半径的球面；

②设 P，Q 为空间两定点，点 A 满足 $AP \perp AQ$，则点 A 的轨迹是以 PQ 为直径的球面.

若在上述情况的基础上，增加限制动点 A 在某平面上，则点 A 只能在球的截面圆上运动.

3．直线上的动点问题：例如，P 为定直线 AB 上的动点，这类问题除了几何法分析之外，还可考虑建系，借助 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 将动点 P 的坐标表示成 λ，用向量法分析问题.

4．翻折问题：解决翻折问题的核心有两点.

①分析翻折前后未发生变化的几何关系，得出翻折后空间图形的几何特征，将问题明朗化.

②在翻折前后的图形中，抓住与折痕线垂直的直线，将空间的计算问题转换到平面上来进行.

典型例题

类型Ⅰ：通过位置关系判断轨迹的基本方法

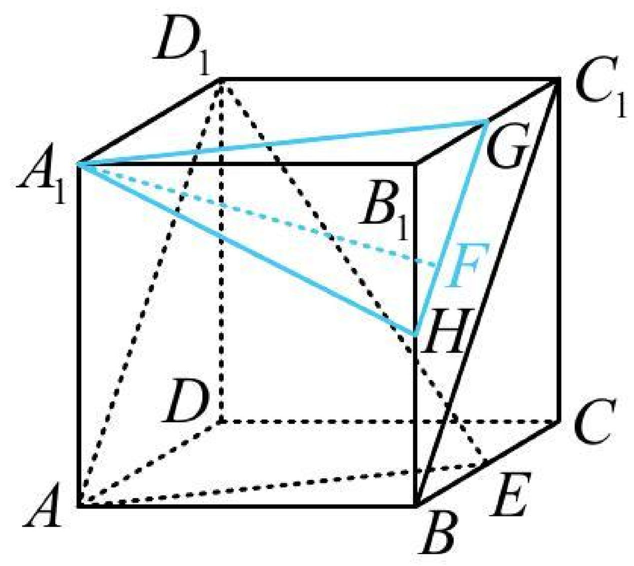
【例 1】在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BC 的中点，F 是侧面 BB_1C_1C 内的动点，若 A_1F // 平面 AD_1E，则点 F 轨迹的长度为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　（D）$2\sqrt{2}$

解析： 由 A_1F // 面 AD_1E 找 F 的轨迹，可过 A_1 作与面 AD_1E 平行的面，找该面与面 BB_1C_1C 的交线，

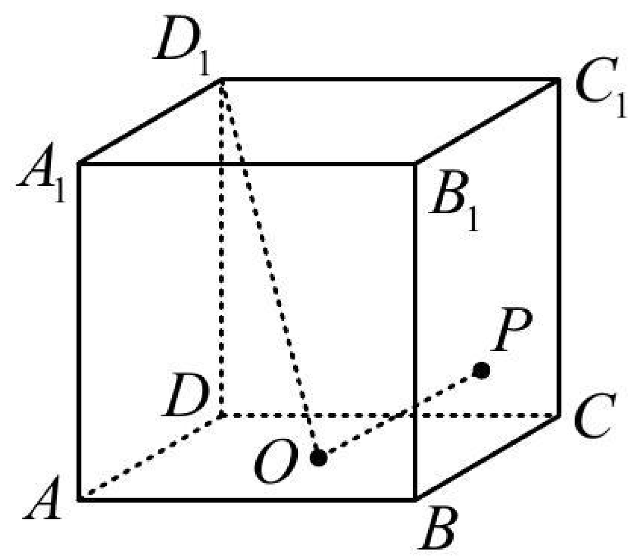
如图，取 B_1C_1 中点 G，连接 A_1G，则 A_1G // AE，取 BB_1 中点 H，连接 GH，A_1H，则 GH // BC_1 // AD_1，所以面 A_1GH // 面 AD_1E，因为面 $A_1GH \cap$ 面 $BB_1C_1C=GH$，所以点 F 的轨迹为线段 GH，其长度为 $\sqrt{2}$.

答案： B



【例 2】如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，点 P 在侧面 BCC_1B_1 的边界及其内部运动，若 $D_1O \perp OP$，则 ΔD_1C_1P 的面积的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$2\sqrt{5}$



解析：要求 $S_{\Delta D_1C_1P}$ 的最大值，需先由 $D_1O \perp OP$ 分析 P 的轨迹，可过 O 作与 D_1O 垂直的平面来看，于是又只需过 O 作两条与 D_1O 垂直的直线，

如图 1，由正方体的结构特征，$\begin{cases} CO \perp BD \\ CO \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow CO \perp$ 平面 $BB_1D_1D \Rightarrow CO \perp D_1O$ ①，

有一条了，另一条不妨在 D_1O 所在的面 BB_1D_1D 内来作，

在面 BB_1D_1D 内作 $OQ \perp D_1O$ 交 BB_1 于 Q，连接 CQ，则 $\Delta D_1DO \backsim \Delta OBQ$，所以 $\dfrac{BQ}{OD} = \dfrac{OB}{DD_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

从而 $BQ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OD = 1$，故 Q 为 BB_1 中点，由 $OQ \perp D_1O$ 和①可得 $D_1O \perp$ 面 COQ，

所以当 P 在面 COQ 内时，总有 $OP \perp D_1O$，又 P 在侧面 BCC_1B_1 内，所以 P 的轨迹是线段 CQ，

现在就能分析 $S_{\Delta D_1C_1P}$ 何时最大了，由图 1 可知 $D_1C_1 \perp C_1P$，所以 C_1P 最大时，$S_{\Delta D_1C_1P}$ 就最大，

如图 2，当 P 与 Q 重合时，C_1P 最大，所以 $(S_{\Delta D_1C_1P})_{\max} = \dfrac{1}{2}D_1C_1 \cdot C_1Q = \sqrt{5}$.

答案：C

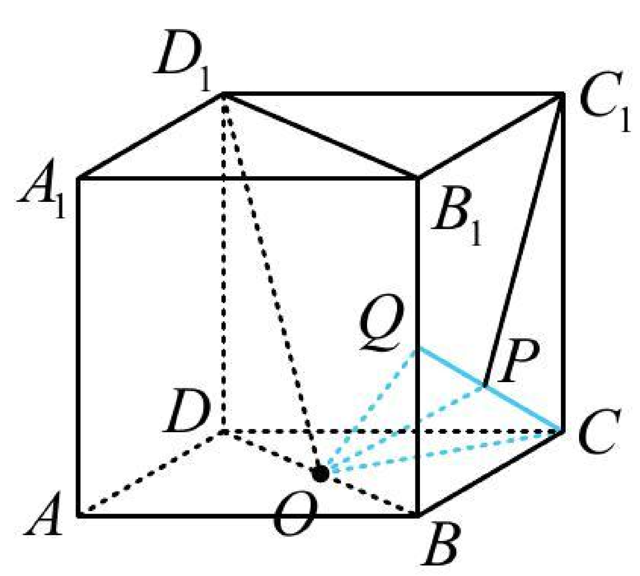


图1

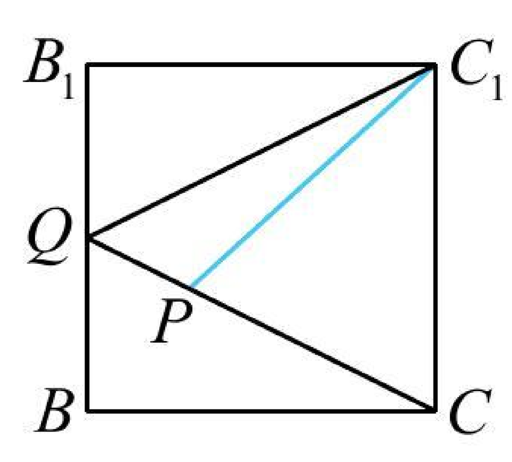


图2

类型Ⅱ：空间轨迹由球到圆

【例 3】（2022 •北京卷）已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是 ΔABC 及其内部的点构成的集合，设集合 $T=\{Q\in S\,|\,PQ\le 5\}$，则 T 表示的区域的面积为（　　）

（A）$\dfrac{3\pi}{4}$　　（B）π　　（C）2π　　（D）3π

解析：Q 在 ΔABC 内，故考虑把 $PQ\le 5$ 转换成 Q 与面 ABC 内某点的关系，由正棱锥想到选底面中心，

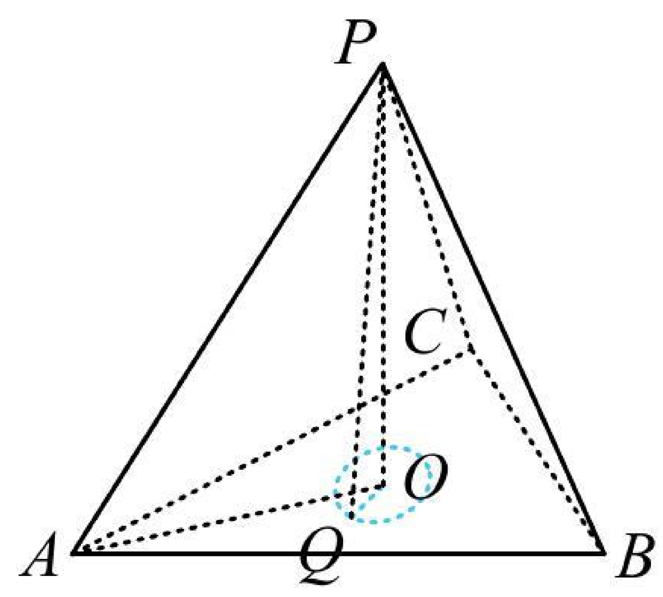
如图，设 O 为 ΔABC 的中心，则 $PO\perp$ 平面 ABC，当 Q 在 ΔABC 内部运动时，总有 $OQ\perp PO$，

所以 $PQ=\sqrt{PO^2+OQ^2}$，故 $PQ\le 5$ 即为 $\sqrt{PO^2+OQ^2}\le 5$ ①，

又 $AO=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=2\sqrt{3}$，所以 $PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=2\sqrt{6}$，代入①得：$OQ\le 1$，

所以集合 T 表示的区域是 ΔABC 内以 O 为圆心，1 为半径的圆及其内部，其面积为 π.

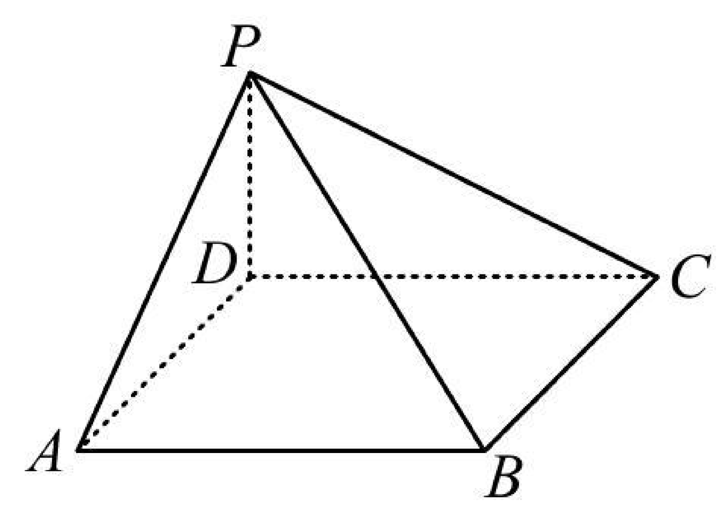
答案：B



【反思】空间中到某定点距离为定值的点的轨迹是球面，若该点还在空间的某个平面上，则轨迹就是圆.

【变式】如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$\angle PBA=\angle PBC$，$PD\perp AD$，Q 为正方形 $ABCD$ 内一动点，且满足 $QA\perp QP$，若 $PD=2$，则三棱锥 $Q-PBC$ 的体积的最小值为（　　）

（A）3　　（B）$\dfrac{8}{3}$　　（C）$\dfrac{4}{3}$　　（D）2



解析：从图形结合 $PD\perp AD$ 可猜想 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，先对此分析，再找一条垂直于 PD 的线即可，

因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=BC$，又 $\angle PBA=\angle PBC$，$PB=PB$，所以 $\Delta PAB\cong\Delta PCB$，

故 $PA=PC$，又 $AD=CD$，$PD=PD$，所以 $\Delta PAD\cong\Delta PCD$，结合 $PD\perp AD$ 可得 $PD\perp CD$，

所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，再来翻译 $QA\perp QP$，类比圆上，我们有球的直径所对的“球周角”为直角，

由 $QA\perp QP$ 可知点 Q 在以 PA 为直径的球面上，其球心为 PA 中点 O，且 $OQ=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{5}$，

但点 Q 只能在正方形 $ABCD$ 内，故应考虑面 $ABCD$ 与球面相交的截面圆，涉及球的截面，过球心作截面

的垂线，可找到截面圆圆心，故只需过 O 作面 $ABCD$ 的垂线，

取 AD 中点 I，连接 OI，则 $OI=\dfrac{1}{2}PD=1$ 且 $OI // PD$，所以 $OI\perp$ 平面 $ABCD$，故 I 即为截面圆圆心，

且 $IQ=\sqrt{OQ^2-OI^2}=2$，所以点 Q 在以 I 为圆心，2 为半径的圆上，把底面单独画出来如图 2，

因为 $V_{Q-PBC}=V_{P-QBC}$，而点 P 到平面 QBC 的距离恒为 2，所以要使三棱锥 $P-QBC$ 的体积最小，

只需 ΔQBC 的面积最小，此时点 Q 应在圆弧的中点处，故 $(V_{Q-PBC})_{\min}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times2\times2=\dfrac{8}{3}$.

答案：B

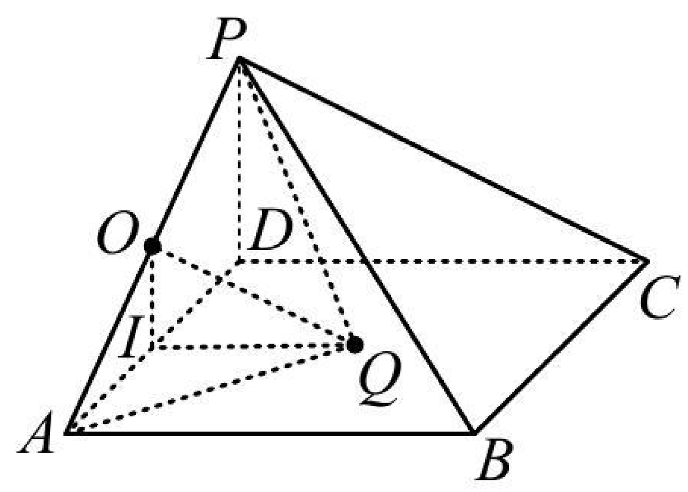


图1

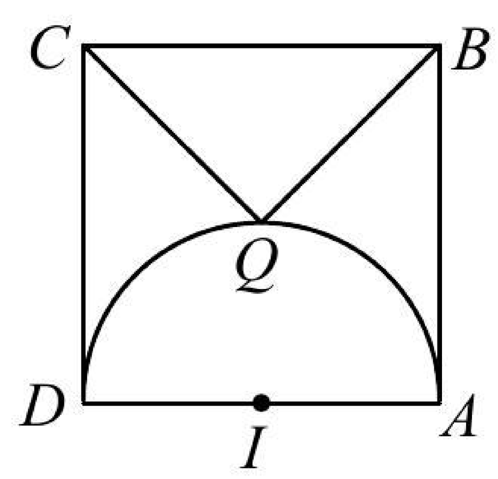
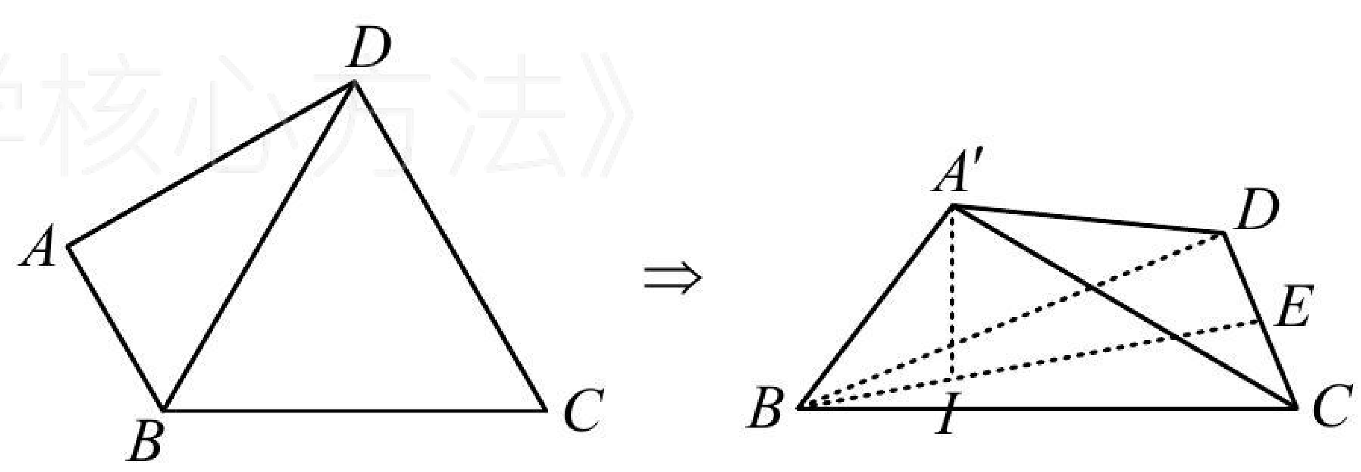


图2

类型III：翻折问题

【例 4】如图，平面四边形 $ABCD$ 中，ΔBCD 是边长为 2 的正三角形，$AB\perp AD$，$AB=1$，现沿对角线 BD 将 ΔABD 折起到 $\Delta A'BD$，使 A' 在平面 BCD 内的射影 I 落在 ΔBCD 的中线 BE 上，则 $BI=$______.



解析：若直接在 $\Delta A'BI$ 中用勾股定理求 BI，会发现 $A'I$ 不好算，但若将翻折后空间图形中的 I 对应到翻折前的平面图形中去，算 BI 就成了初中问题，

如图 2，作 $A'O\perp BD$ 于 O，$A'I\perp$ 平面 $BCD\Rightarrow BD\perp A'I$，所以 $BD\perp$ 平面 $A'OI$，故 $BD\perp OI$，

注意到翻折前后 ΔBCD 和 $\Delta A'BD$ 内部点线的位置关系未变，故翻折前也应有 $BD\perp AO$，$BD\perp OI$，于是 I，O 在原图中的位置如图 1，接下来的计算可在图 1 中进行，

$AB=1\Rightarrow OB=AB\cdot\cos\angle ABO=AB\cdot\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{1}{2}$，由题意，$\angle OBI=30^{\circ}$，所以 $BI=\dfrac{OB}{\cos\angle OBI}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

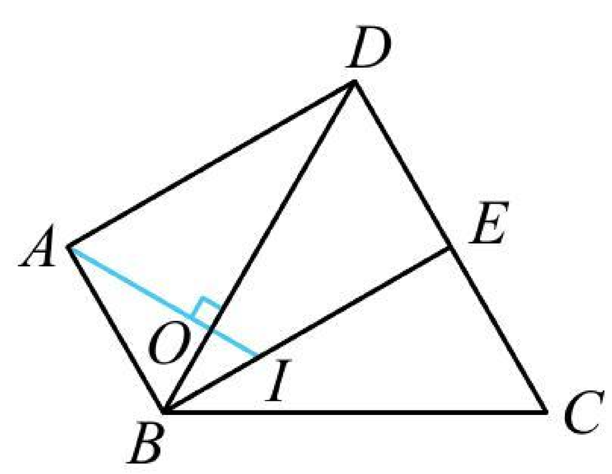


图1

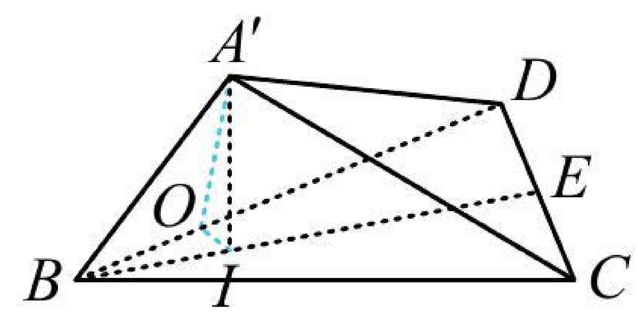
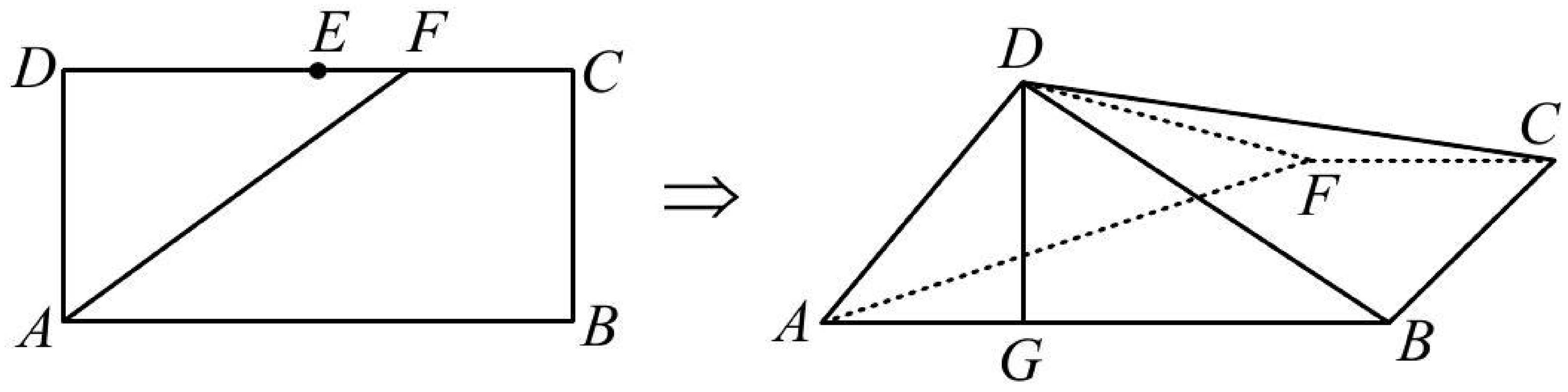


图2

【变式】如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=\sqrt{3}$，E 为 CD 中点，F 为线段 EC 上（端点除外）一动点，现将 ΔAFD 沿 AF 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，在平面 ABD 内过点 D 作 $DG\perp AB$ 于 G，则 AG 长度的取值范围为_____.



解析：先把翻折后空间图形的点 G 对应到翻折前的平面图形中去，再分析 AG 怎么算，

由题意，平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，且 $DG\perp AB$，所以 $DG\perp$ 平面 ABC，故 $AF\perp DG$，

如图 2，作 $DM\perp AF$ 于 M，连接 GM，结合 $AF\perp DG$ 可得 $AF\perp$ 平面 DGM，所以 $AF\perp MG$，

注意到翻折前后 ΔADF 和梯形 $ABCF$ 内部的点线位置关系未变，故翻折前也应有 $AF\perp DM$，$AF\perp GM$，于是 G，M 在原图中的位置如图 1，要求 AG 的范围，可设 DF 为变量，表示 AG，

设 $DF=x(2<x<4)$，因为 $\Delta AGM\backsim\Delta FDM$，所以 $\dfrac{AG}{DF}=\dfrac{AM}{FM}$，接下来求 $\dfrac{AM}{FM}$，

由图可知，$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{3+x^2}$，$AM=AD\cdot\cos\angle DAF=AD\cdot\dfrac{AD}{AF}=\dfrac{3}{\sqrt{3+x^2}}$，

$FM=DF\cdot\cos\angle DFA=DF\cdot\dfrac{DF}{AF}=\dfrac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}$，所以 $AG=\dfrac{DF\cdot AM}{FM}=\dfrac{3}{x}$，结合 $2<x<4$ 可得 $\dfrac{3}{4}<AG<\dfrac{3}{2}$.

答案：$(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2})$

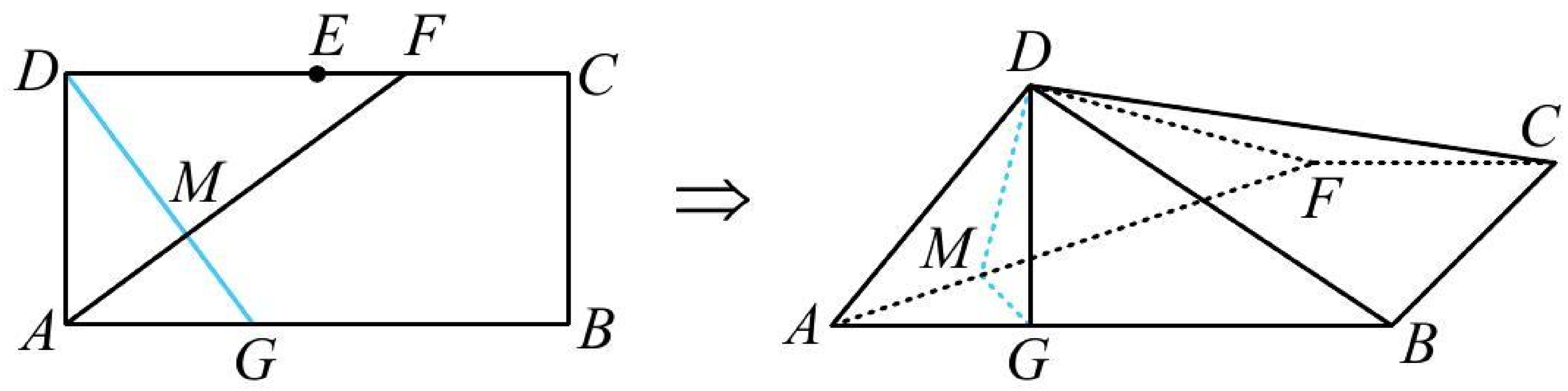


图1　　图2

【总结】从上面两道题可以看出，求解翻折问题的核心有两点：①分析翻折前后未发生变化的几何关系；②抓住与折痕线垂直的直线，将空间的计算问题转换到平面上来处理.

类型Ⅳ：直线上的动点问题处理思路

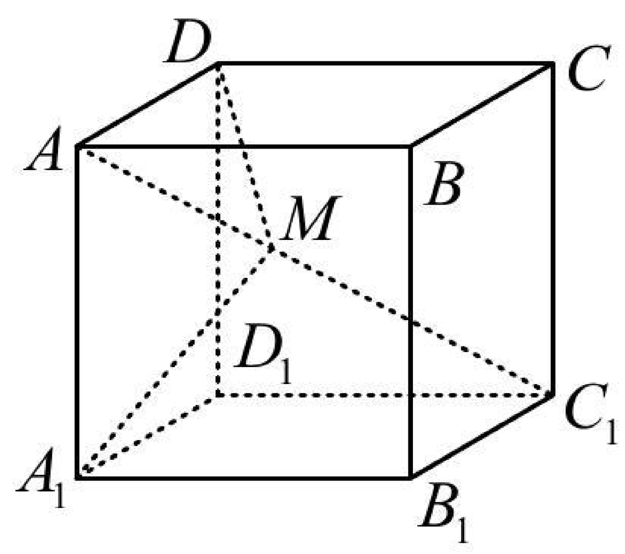
【例 5】（多选）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是线段 AC_1 上的动点（M 与 A，C_1 不重合），则下列结论正确的是（　　）

（A）存在点 M，使 $A_1M\perp$ 平面 BC_1D

（B）存在点 M，使 $DM//$ 平面 B_1CD_1

（C）ΔA_1DM 的面积不可能等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

（D）若 S_1，S_2 分别是 ΔA_1DM 在面 $A_1B_1C_1D_1$ 和面 BB_1C_1C 的正投影面积，则存在点 M，使 $S_1=S_2$



解法 1：点 M 是唯一动点，且在线段 AC_1 上，故可建系，设出 M 的坐标，用向量法判断选项，

如图 1 建系，设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}(0<\lambda<1)$，$D_1(0,0,0)$，$A(1,0,1)$，$C_1(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,-1)$，

故 $\overrightarrow{D_1M}=\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{D_1A}+\lambda\overrightarrow{AC_1}=(1,0,1)+(-\lambda,\lambda,-\lambda)=(1-\lambda,\lambda,1-\lambda)$，所以 $M(1-\lambda,\lambda,1-\lambda)$，

A 项，判断线面垂直，只需看 A_1M 能否与面 BC_1D 内的两条相交直线垂直（无需求法向量），

$A_1(1,0,0)$，$B(1,1,1)$，$D(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{A_1M}=(-\lambda,\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{C_1B}=(1,0,1)$，

令 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{DB}=-\lambda+\lambda=0\\ \overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{C_1B}=-\lambda+1-\lambda=0\end{cases}$ 可得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，所以当 M 为 AC_1 中点时，$A_1M\perp$ 面 BC_1D，故 A 项正确；

B 项，要判断线面能否平行，只需看直线的方向向量与平面的法向量能否垂直，

可求得平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{DM}=(1-\lambda,\lambda,-\lambda)$，

令 $\overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda-1+\lambda+\lambda=0$ 可得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，所以存在点 M，使 $DM//$ 平面 B_1CD_1，故 B 项正确；

C 项，要求 ΔA_1DM 的面积，关键是求点 M 到直线 A_1D 的距离，可用向量法来求，

因为 $\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,1)$，所以直线 A_1D 的一个单位方向向量为 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{A_1D}|}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

又 $\overrightarrow{A_1M}=(-\lambda,\lambda,1-\lambda)$，所以点 M 到直线 A_1D 的距离 $d=\sqrt{\overrightarrow{A_1M}^2-(\overrightarrow{A_1M}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+\dfrac{1}{2}}$，

因为 $A_1D=\sqrt{2}$，所以 $S_{\Delta A_1DM}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+\dfrac{1}{2}}$，令 $S_{\Delta A_1DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 解得：$\lambda=\dfrac{1}{3}$，

所以 ΔA_1DM 的面积可以等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，故 C 项错误；

D 项，如图 1，由 $M(1-\lambda,\lambda,1-\lambda)$ 可知 M 在面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的射影为 $M_1(1-\lambda,\lambda,0)$，

所以 $S_1=S_{\Delta A_1D_1M_1}=\dfrac{1}{2}\times1\times\lambda=\dfrac{\lambda}{2}$，$M$ 在面 BB_1C_1C 内的射影为 $M_2(1-\lambda,1,1-\lambda)$，所以 $S_2=S_{\Delta B_1CM_2}$，

在图 1 中，由 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}$ 可得 $BM_2=\lambda BC_1=\sqrt{2}\lambda$，为了便于计算面积，我们把右侧面单独画出来，

如图 2，$IM_2=|IB-BM_2|=\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\lambda\right|$，加绝对值是因为 M_2 可能在线段 IC_1 上，

所以 $S_2=S_{\Delta B_1CM_2}=\dfrac{1}{2}B_1C\cdot IM_2=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\lambda\right|=\left|\dfrac{1}{2}-\lambda\right|$，

令 $S_1=S_2$ 可得 $\dfrac{\lambda}{2}=\left|\dfrac{1}{2}-\lambda\right|$，解得：$\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 1（舍去），所以存在点 M，使 $S_1=S_2$，故 D 项正确.

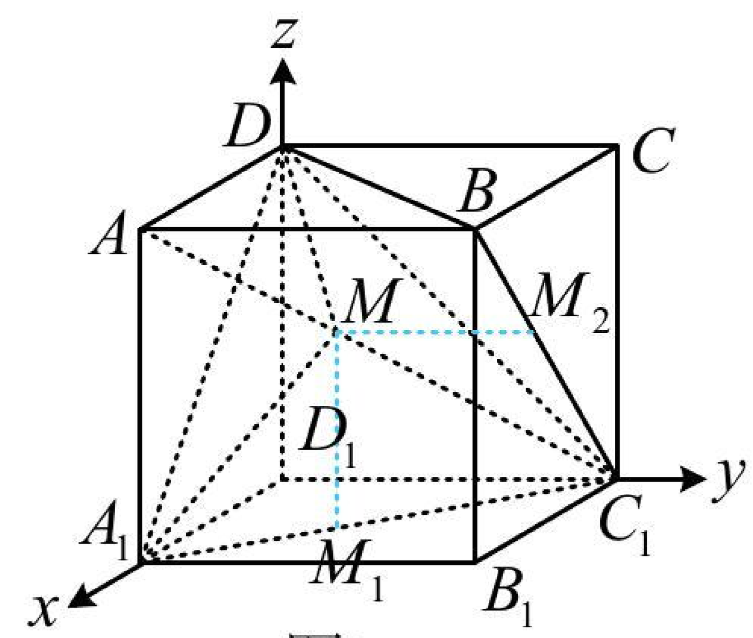


图1

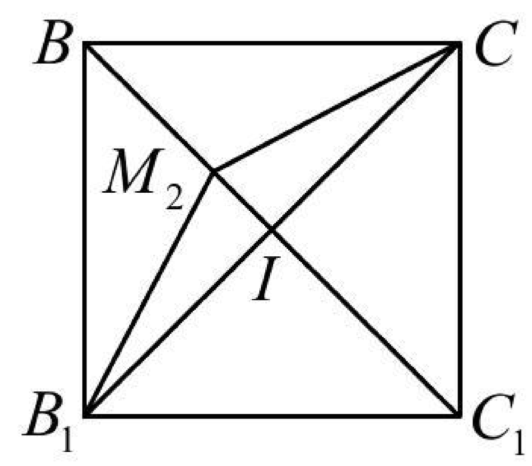


图2

解法 2：A 项，如图 3，$A_1C\perp$面 BC_1D，当 M 为 A_1C 与 AC_1 交点时，$A_1M\perp$面 BC_1D，故 A 项正确；

B 项，要寻找满足 DM // 面 B_1CD_1 的点 M，可过 D 作面 B_1CD_1 的平行平面，

如图 4 的面 A_1BD，当 M 为该面与 AC_1 的交点时，就满足 DM // 平面 B_1CD_1，故 B 项正确；

C 项，若以 A_1D 为底求 $S_{\Delta A_1DM}$，则底 $A_1D=\sqrt{2}$ 不变，可通过分析高的最值来求面积的范围，

如图 5，由对称性可知 $A_1M=DM$，取 AD_1 中点 N，连接 MN，则 $MN\perp A_1D$，

MN 就是高，N 是定点，可到 ΔAC_1D_1 中来分析，把它单独画出来，如图 6，

当 $MN\perp AC_1$ 时，MN 最小，作 $D_1T\perp AC_1$ 于 T，

则 $MN_{\min}=\dfrac{1}{2}D_1T=\dfrac{1}{2}\cdot C_1D_1\cdot\sin\angle D_1C_1T=\dfrac{1}{2}\cdot C_1D_1\cdot\dfrac{AD_1}{AC_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，所以 $(S_{\Delta A_1DM})_{\min}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以 ΔA_1DM 的面积可以为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，故 C 项错误；

D 项，此选项几何法与向量法判断的本质相同，不再赘述.

答案：ABD

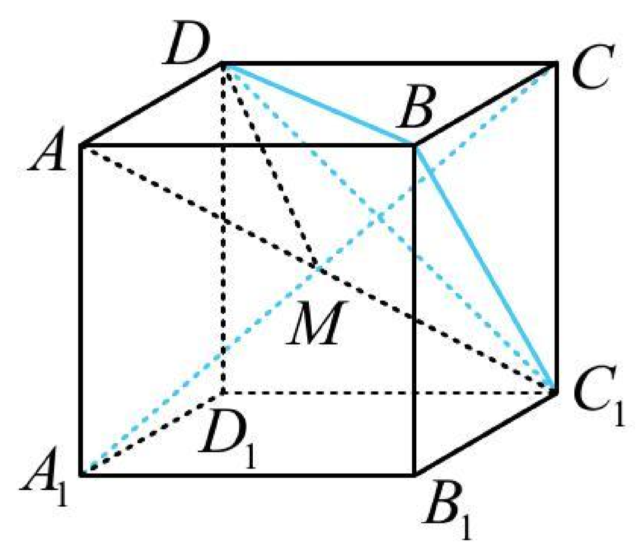


图3

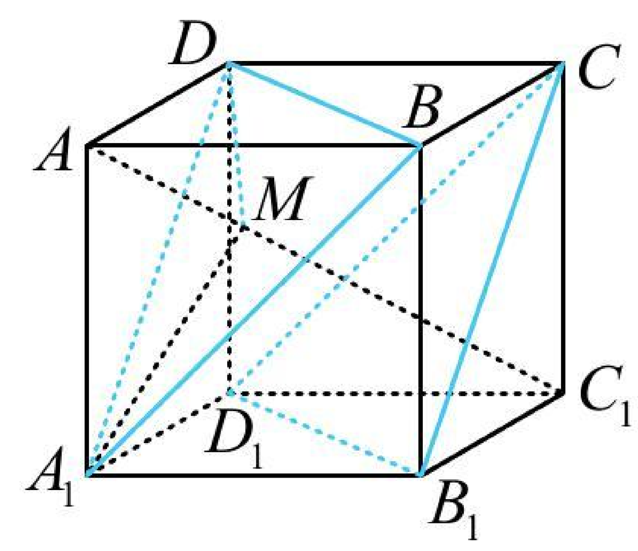


图4

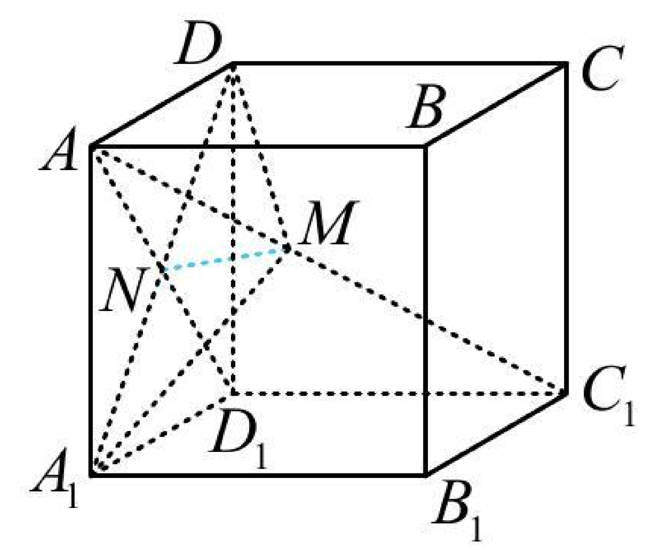


图5

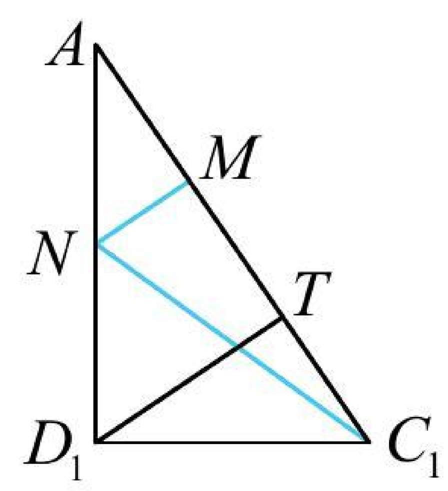


图6

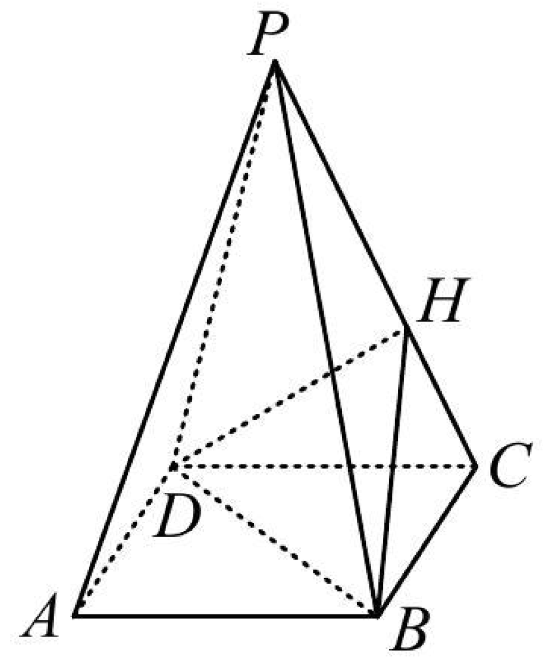
【反思】①可发现，几何法简单但需技巧，向量法无脑但计算麻烦，两种方法都要学好，在几何法没思路时，还可使用向量法“兜底”；②用向量法设直线上动点时，像本题这样设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}$，即可用 λ 表示 M 的坐标.

强化训练

1.（2021·上海卷·★★）已知圆柱的底面半径为 1，高为 2，AB 是上底面圆的一条直径，C 是下底面圆周上的一个动点，则 ΔABC 的面积的取值范围是_____.

2．（2022 • 北京模拟 • ★★）已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 4，棱 AB 的长为 2，点 H 为侧棱 PC 上一动点，那么 ΔHBD 的面积的最小值为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　（D）$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$



3．（2023 • 昆明模拟 • ★★★）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动，若 $3 \le A_1P \le \sqrt{11}$，则三棱锥 $P-A_1BD$ 的体积的最小值是（　　）

（A）1　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）3　　（D）$\dfrac{9}{2}$

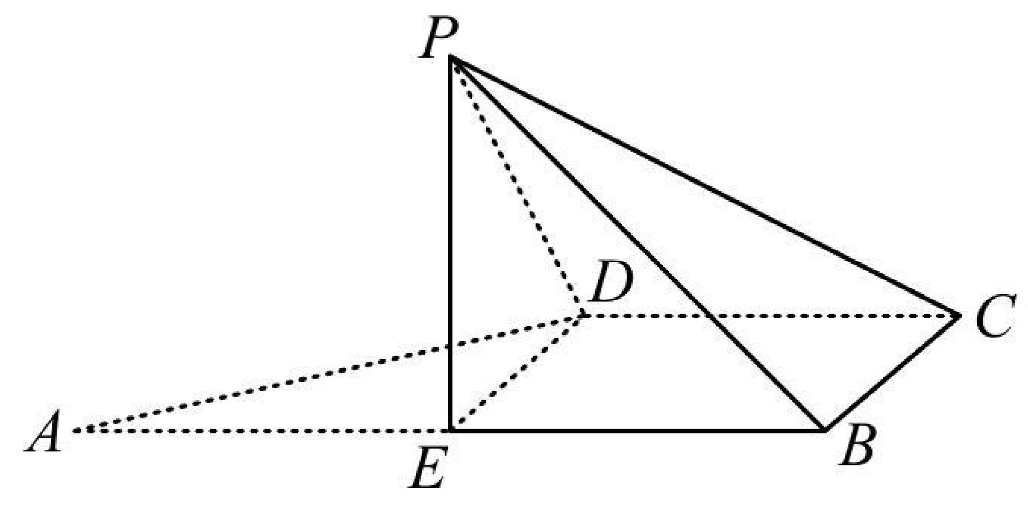
4.（2022 •福建模拟 •★★★）（多选）如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AB \perp BC$，$BC = CD = \frac{1}{2}AB = 1$，$E$ 为 AB 中点，以 DE 为折痕把 ΔADE 折起，使点 A 到达点 P 的位置，使 $PC = \sqrt{3}$，则（　　）

（A）平面 $PED \perp$ 平面 PCD

（B）$PC \perp BD$

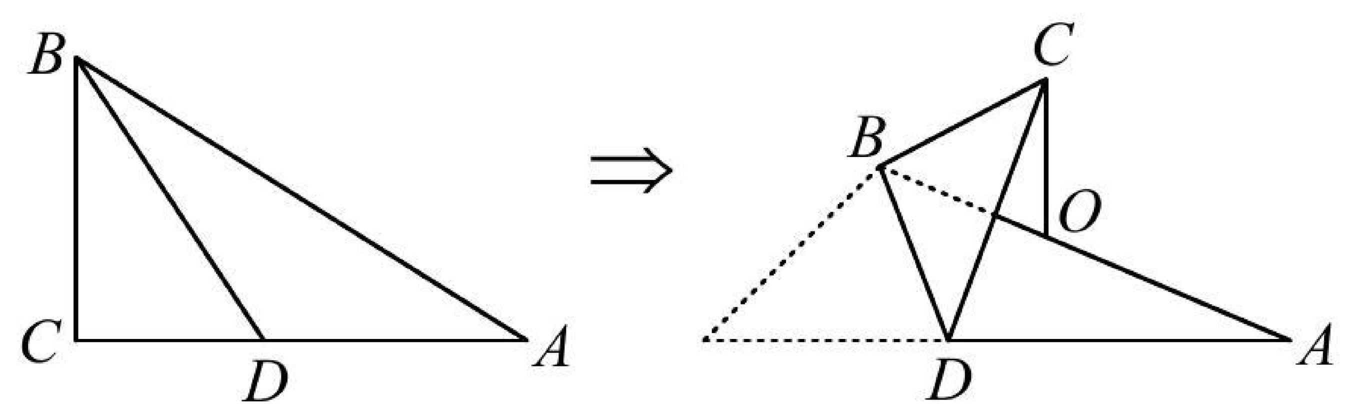
（C）二面角 $P-DC-B$ 的大小为 60°

（D）PC 与平面 PED 所成角为 45°



5.（2023 • 四川模拟 • ★★★★）在 ΔABC 中，$\angle C = 90^{\circ}$，$AB = 2$，$AC = \sqrt{3}$，D 为 AC 上的一点（不含端点），将 ΔBCD 沿 BD 折起，使点 C 在平面 ABD 上的射影 O 落在线段 AB 上，则线段 OB 长度的取值范围为（　　）

（A）$(\frac{1}{2},1)$　　（B）$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　（C）$(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$　　（D）$(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$



6.（2022 • 山西模拟 • ★★★★）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 DD_1 的中点，N 为正方形 $ABCD$ 内一动点（含边界），则下列命题正确的有（　　）

（A）若 $MN \perp A_1C_1$，则点 N 的轨迹为线段

（B）若直线 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°，则点 N 的轨迹是一段椭圆弧

（C）若 N 到直线 BB_1 与到直线 CD 的距离相等，则点 N 的轨迹为一段抛物线

（D）若直线 D_1N 与 AB 所成的角为 60°，则点 N 的轨迹为一段双曲线

7．（2020 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★★）已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60^{\circ}$，以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为_____.